7月10日，13日，20日分 事前資料

1　付帯条件つき限定命題

M, P を一変数の命題関数（述語）とするとき，次の2つは付帯条件つき限定命題と呼ばれることがある；

$\forall x\,[M(x) \Rightarrow P(x)]$：「$\underline{M(x)\text{ なる すべての }x\text{ に対して}}$ $P(x)$」
（「すべての x に対して，$M(x)$ ならば $P(x)$」）

$\exists x\,[M(x) \wedge P(x)]$：「$\underline{M(x)\text{ なる少なくとも 1 つの }x\text{ が存在して}}$ $P(x)$」
（「少なくとも 1 つの x が存在して，$M(x)$ かつ $P(x)$」）

特に，$M(x)$ が $x \in A$ の形のときは，

$\forall x\,[(x \in A) \Rightarrow P(x)]$ を　$\forall x \in A\,[P(x)]$　または　$\forall x \in A;\ P(x)$,

$\exists x\,[(x \in A) \wedge P(x)]$ を　$\exists x \in A\,[P(x)]$　または　$\exists x \in A;\ P(x)$

などと簡易表現することも多い．これと同様に，次のようにも書く．

$\forall x\,[(x>0) \Rightarrow (x^2>0)]$ を　$\forall x>0\ (x^2>0)$　または　$\forall x>0;\ x^2>0$,

$\exists x\,[(x<0) \wedge (x^2=1)]$ を　$\exists x<0\ (x^2=1)$　または　$\exists x<0;\ x^2=1$.

否定 $\neg$ に関して，次の法則が成り立つ（$\neg(Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow Q \wedge \neg R$ に注意）．

$$\neg\forall x\,[M(x) \Rightarrow P(x)] \iff \exists x[M(x) \wedge \neg P(x)],$$
$$\neg\exists x\,[M(x) \wedge P(x)] \iff \forall x[M(x) \Rightarrow \neg P(x)].$$

$M(x)$ が $x \in A$ の形のときは，

$$\neg\forall x \in A;\ P(x) \iff \exists x \in A;\ \neg P(x),$$
$$\neg\exists x \in A;\ P(x) \iff \forall x \in A;\ \neg P(x).$$

2　集合族と その演算

集合を要素とする集合を **[集合] 族** (family (class, collection) [of sets]) という．通常，集合族はアルファベットの大文字の筆記体 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, ...（または $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ...）またはドイツ字体 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... で表す．

例 2.1 集合 X の**ベキ集合** (power set) は，X の すべての部分集合からなる集合族であり，$\mathcal{P}(X)$, $\mathfrak{P}(X)$, $\wp(X)$, $\mathscr{P}(X)$, $\mathrm{P}(X)$, 2^X などと表す．

$$\mathcal{P}(X) \ = \ \{A \mid A \subset X\}$$

である．例えば，$X = \{a, b, c\}$ のとき，

$$\mathcal{P}(X) \ = \ \{\,\emptyset,\, \{a\},\, \{b\},\, \{c\},\, \{a,b\},\, \{b,c\},\, \{c,a\},\, X\,\}.$$

$|X| = n$ のとき $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$ である．

定義 2.1 $\mathscr{A}$ を集合族とする．

$\mathscr{A}$（に属する集合）の合併集合： $\bigcup\mathscr{A} \ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ \{x \,|\, \exists A \in \mathscr{A}\,(x \in A)\}$.

$\mathscr{A}$（に属する集合）の共通集合*： $\bigcap\mathscr{A} \ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ \{x \,|\, \forall A \in \mathscr{A}\,(x \in A)\}$.

例 2.2 A_1, A_2, $\ldots$, A_n を集合，$\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ とするとき，

$$\bigcup\mathscr{A} \ = \ A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \qquad \bigcap\mathscr{A} \ = \ A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

集合 Λ の各要素 λ に 1 つずつ集合 A_λ が対応しているとき（Λ を添え字集合または添数集合という），A_λ 全体からなる族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ の合併集合と共通集合を それぞれ

$$\bigcup\{A_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\} \ = \ \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \ = \ \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda,$$
$$\bigcap\{A_\lambda \,|\, \lambda \in \Lambda\} \ = \ \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \ = \ \cap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$$

などと表す．文脈上 Λ を書かなくても判るときには，$\bigcup\limits_{\lambda} A_\lambda$, $\bigcap\limits_{\lambda} A_\lambda$ または $\cup_\lambda A_\lambda$, $\cap_\lambda A_\lambda$ とも書く．なお，$\Lambda = \mathbb{N}$ のときは $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ または $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ とも書き，$\Lambda \ = \ \{1, 2, \ldots, n\}$ のときには $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ または $\cup_{i=1}^{n} A_i$, $\cap_{i=1}^{n} A_i$ とも書く．これらに準じて，

*普通 $\bigcap\emptyset$ は定義されないが，全体集合 X が想定されており，考えている集合族が X の部分集合族だけであるとき便宜的に定義されることがある（今後，$\bigcap\emptyset$ が現れる場合は，常に そのような状況とする）．これに対して $\bigcup\emptyset$ は常に定義される．これらの値については例 2.3 (p. 3) を参照．

例えば $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda > 1\}$ のときには $\bigcup_{\lambda>1} A_\lambda$ のような書き方もする．集合族 $\mathscr{A}$ 自身を添え字集合とみなせば，下のようにも書ける．

$$\bigcup \mathscr{A} = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A, \qquad \bigcap \mathscr{A} = \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A.$$

例 2.3　(1) $\bigcup\emptyset = \emptyset$.　(2) X を全体集合とするとき，$\bigcap\emptyset = X$.

証明　(1). 合併集合の定義より，$x \in \cup\,\emptyset \iff \exists A \in \emptyset\,(x \in A) \iff \exists A\,(A \in \emptyset \wedge x \in A)$．$A \in \emptyset$ は偽ゆえ，x が何であっても $\exists A\,(A \in \emptyset \wedge x \in A)$ は偽である．よって，$\forall x\ (x \notin \cup\,\emptyset)$ だから $\cup\,\emptyset = \emptyset$.

(2). 共通集合の定義より，$x \in \cap\emptyset \iff \forall A \in \emptyset\,(x \in A) \iff \forall A\,(A \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$．$A \in \emptyset$ は偽ゆえ，x が何であっても $\forall A\,(A \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$ は真である．よって，任意の $x \in X$ について $x \in \cap\emptyset$ なので $X \subset \cap\emptyset$. 一方，X は全体集合だから $\cap\emptyset \subset X$．従って $\cap\emptyset = X$.　∎

3　関係と逆関係

定義 3.1　$X \times Y$ の部分集合を，X から Y への（または X と Y の間の）**2 項** (binary) **関係** または単に**関係**といい，X から X への関係を X 上の（または X における）関係という．関係 $R \subset X \times Y$ に対し，$(x, y) \in R$ を xRy と書き，$(x, y) \notin R$ を $x\not{R}y$ と書く．

例 3.1　X を集合とするとき，$\in$ は X からベキ集合 $\mathcal{P}(X)$ への関係となっている．

定義 3.2　R を X から Y への関係とするとき，次式で定まる Y から X への関係 R^{-1} を R の**逆** (inverse) 関係または単に逆という．

$$yR^{-1}x \overset{\text{def}}{\iff} xRy.$$

例 3.2　$\in$ と $\ni$ は互いに逆関係である．$\subset$ と $\supset$ も互いに逆関係であり，普通の数の順序 $\leqq$ と $\geqq$ も互いに逆関係である．

4　半順序関係 —基本的概念—

例 4.1　普通の数の順序 $\leqq$ は，$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ の どの集合上の関係としても反射的，反対称的，推移的かつ**比較可能** (comparable) である．

$$\text{比較可能性：} \qquad \forall x, y \in X; \quad x \leq y \quad \text{または} \quad y \leq x.$$

定義 4.1 反射的，反対称的，推移的かつ比較可能である関係を**全順序** (total order)[関係] という[†]．X が全順序 $\leq$ をもつ集合のとき，$(X, \leq)$ または単に X を**全順序集合** (totally ordered set, 略して toset) という．

例 4.2 $\mathscr{S} = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$ とするとき，$(\mathscr{S}, \subset)$ は全順序集合だが，$(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subset)$ は比較可能性がないので，全順序集合ではない．

本講義では，整数の整除 (divisibility) 関係 $|$ をしばしば用いる；

$$m \mid n \overset{\text{def}}{\iff} m \text{ は } n \text{ の約数} \quad (\exists q \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } n = qm).$$

例 4.3 $(\{1,2,6,12\}, |\,)$ は全順序集合だが，$(\mathbb{N}, |\,)$ は比較可能性がないので，全順序集合ではない．

定義 4.2 反射的，反対称的，かつ推移的な関係を**半順序** (partial order) [関係] という．X が半順序 $\leq$ をもつ集合のとき，$(X, \leq)$ または単に X を**半順序集合** (partially ordered set, 略して poset) という．

全順序は半順序（の特殊ケース）である．数学には全順序よりも半順序の方がよく現れるので，半順序を単に順序ということがある．

例 4.4 任意の集合族 $\mathscr{S}$ に対して $(\mathscr{S}, \subset)$ は半順序集合である．

例 4.5 $(\mathbb{N}, |\,)$ は半順序集合である．

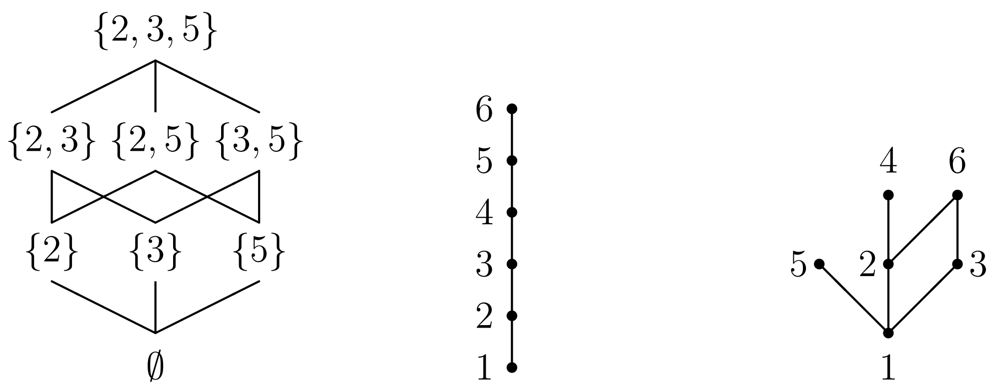
$\leq$ が半順序のとき，次の記号も用いる．

$$x < y \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad x \leq y \text{ かつ } y \not\leq x \quad (\iff x \leq y \text{ かつ } x \neq y),$$
$$x \geq y \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad y \leq x, \qquad\qquad x > y \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad y < x.$$

$\leq$ と $\geq$ は互いに逆関係であり，$<$ と $>$ も互いに逆関係である．

定義 4.3 $\leq$ を有限集合 X 上の半順序とする．$x < y$ であり，$x < z < y$ なる $z \in X$ が存在しないとき，x と y を直線で結び，x が y の下にあるように，X のすべての要素について描いたものを，$(X, \leq)$ の **Hasse 図** (Hasse diagram) または図式，ダイアグラムという（下図）．

[†] 比較可能性は反射性を含意するので，厳密には，反射性は全順序の定義から除ける．すなわち，反対称的，推移的かつ比較可能である関係を全順序として定義できる．



$(\mathcal{P}(\{2,3,5\}), \subset)$ $(\{1,2,3,4,5,6\}, \leqq)$ $(\{1,2,3,4,5,6\}, |\,)$

定義 4.4 $(X, \leq)$ を半順序集合とする．

$x, y \in X$ が**比較可能** (comparable) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $x \leq y$ または $y \leq x$，

$x, y \in X$ が**比較不 [可] 能** (incomparable/noncomparable)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ x, y が比較可能でない．

命題 4.1 $(X, \leq)$ を半順序集合，$x, y, z \in X$ とする．

(i) $x \not\leq y \iff (x > y$ または x と y が比較不能$)$.

(ii) $x \leq y \iff x < y$ または $x = y$.

(iii) (a) $x \leq y,\ y < z \implies x < z$,

(b) $x < y,\ y \leq z \implies x < z$,

(c) $x < y,\ y < z \implies x < z$.

証明． 略

定義 4.5 $(X, \leq)$ を半順序集合とし，$S \subset X$ とする．

$s \in X$ が S の**最大** (greatest) 元 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $s \in S$ かつ $\forall x \in S;\ x \leq s$.

$s \in X$ が S の**最小** (least) 元 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $s \in S$ かつ $\forall x \in S;\ s \leq x$.

例 4.6 $(\mathbb{N}, \leqq)$ において，$\mathbb{N}$ の最大元はなく，最小元は 1 である．また，$\{1,2,3,4,5,6\}$ の最大元は 6，最小元は 1 である．

例 4.7 $(\mathcal{P}(X), \subset)$ において，$\mathcal{P}(X)$ の最大元は X，最小元は $\emptyset$ である．

例 4.8 例 4.5 の $(\mathbb{N}, |)$ を考える．$\mathbb{N}$ に最大元はなく，最小元は 1 である．また，$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ に最大元はなく，最小元は 1 である（p. 5 右図）．

命題 4.2 $(X, \leq)$ を半順序集合とする．$S \subset X$ に最大元が存在すれば一意であり，最小元も存在すれば一意である．

証明． 最大元の一意性を示す．s, s' を S の最大元とする．定義より，すべての $x \in S$ に対して $x \leq s$ であり，すべての $x \in S$ に対して $x \leq s'$ であって，さらに $s, s' \in S$ である．すべての $x \in S$ に対して $x \leq s$ であることと $s' \in S$ より $s' \leq s$ である．同様に，すべての $x \in S$ に対して $x \leq s'$ であることと $s \in S$ より $s \leq s'$ である．よって，$\leq$ の反対称性から $s = s'$ となる．最小元の一意性の証明も同様． ∎

上の命題 4.2 に基づき，$S \subset X$ に最大元が存在するとき，それを $\max S$ で表し，最小元が存在するとき，それを $\min S$ で表す．

定義 4.6 $(X, \leq)$ を半順序集合とし，$S \subset X$ とする．

$$t \in X \text{ が } S \text{ の上界 (upper bound)} \overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in S\,(x \leq t).$$
$$t \in X \text{ が } S \text{ の下界 (lower bound)} \overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in S\,(t \leq x).$$

例 4.9 $(\mathbb{N}, \leqq)$ において，$\{2, 4, 6\}$ の上界は 6, 7, ...，下界は 1 と 2 である．

例 4.10 $(\mathcal{P}(\{2, 3, 5\}), \subset)$ において，$\{\{2\}, \{3\}\}$ の上界は $\{2, 3\}$ と $\{2, 3, 5\}$ であり，下界は $\emptyset$ だけである．また，$\{\{2, 3\}, \{5\}\}$ の上界は $\{2, 3, 5\}$ だけであり，下界も $\emptyset$ だけである．

例 4.11 $(\mathbb{N}, |)$ において，任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し，$\{m, n\}$ の上界は m と n の公倍数に一致し，下界は m と n の公約数に一致する．

$S \subset X$ に上界や下界が存在するとき，それぞれ一般に複数（場合によっては無限に）存在し得る．上界や下界が存在しない場合もある．

定義 4.7 $(X, \leq)$ を半順序集合とし，$S \subset X$ とする．

$u \in X$ が S の**上限** (supremum) または**最小上界** (least upper bound)

$$\overset{\text{def}}{\iff}\quad u\,\text{が}\,S\,\text{の上界全体の集合}\,\{t\in X\mid\forall x\in S\,(x\le t)\}\,\text{の最小元.}$$
$u\in X$ が S の**下限** (infimum) または**最大下界** (greatest lower bound)
$$\overset{\text{def}}{\iff}\quad u\,\text{が}\,S\,\text{の下界全体の集合}\,\{t\in X\mid\forall x\in S\,(t\le x)\}\,\text{の最大元.}$$

命題4.2より，上限も下限も存在すれば一意である．$S\subset X$ に上限が存在するとき，それを $\sup S$ または $\mathrm{lub}\,S$ で表し，下限が存在するとき，それを $\inf S$ または $\mathrm{glb}\,S$ で表す．

例 4.12　$(\mathbb{N},\leqq)$ において，$\sup\{2,4,6\}=\min\{6,7,8,\ldots\}=6$，$\inf\{2,4,6\}=\max\{1,2\}=2$ である（例4.9参照）．

例 4.13 $(\mathcal{P}(X),\subset)$ において，$\{A,B\}\subset\mathcal{P}(X)$ の上限は $A\cup B$，下限は $A\cap B$ である．また，$\mathscr{A}\subset\mathcal{P}(X)$ の上限は $\bigcup\mathscr{A}$，下限は $\bigcap\mathscr{A}$ である．

例 4.14　$(\mathbb{N},|)$ において，任意の $m,n\in\mathbb{N}$ に対し，$\{m,n\}$ の上限は m と n の最小公倍数であり，下限は最大公約数である．

例 4.15　$(\mathbb{R},\leqq)$ において，開区間 $(0,1)$ の上界全体の集合は $[1,\infty)$，下界全体の集合は $(-\infty,0]$ である．よって $\sup(0,1)=1,\inf(0,1)=0$ である．また，閉区間 $[0,1]$ の上界全体の集合は $[1,\infty)$，下界全体の集合は $(-\infty,0]$ なので，$\sup[0,1]=1$，$\inf[0,1]=0$ である．

命題 4.3　$(X,\le)$ を半順序集合，$S\subset X$ とする．

(i)　s^* が S の最大元 $\Leftrightarrow$ s^* は S の上界で，$s^*\in S$
$\Leftrightarrow$ s^* は S の上限で，$s^*\in S$.

(ii)　s_* が S の最小元 $\Leftrightarrow$ s_* は S の下界で，$s_*\in S$
$\Leftrightarrow$ s_* は S の下限で，$s_*\in S$.

証明． (i) のみ示す（(ii) も同様）．最初の $\Leftrightarrow$ は，s^* が S の最大元であることの定義と s^* が S の上界であることの定義から明らか．

「s^* が S の上界で $s^* \in S \Rightarrow s^*$ が S の上限で $s^* \in S$」を示す．t を S の任意の上界とすると，上界の定義より すべての $s \in S$ について $s \leq t$ である．仮定より $s^* \in S$ だから，$s^* \leq t$ となる．仮定から s^* は S の上界であり，t は S の任意の上界だったから，いま示したことは「s^* が上界全体の集合の最小元であること」を意味する．よって上限の定義より，s^* は S の上限である．「s^* が S の上界で $s^* \in S \Leftarrow s^*$ が S の上限で $s^* \in S$」は，上限の定義より上限が上界であることから明らか． ∎

系 4.1 $(X, \leq)$ を半順序集合とする．任意の $S \subset X$ について，$\max S$ が存在すれば $\sup S = \max S$ であり，$\min S$ が存在すれば $\inf S = \min S$ である．特に $x \leq y \Leftrightarrow \max\{x, y\} = y \Leftrightarrow \min\{x, y\} = x \Leftrightarrow \sup\{x, y\} = y \Leftrightarrow \inf\{x, y\} = x$．

命題 4.4 $(X, \leq)$ を半順序集合，$S, T \subset X$ とする．

(1) $\sup S$ と $\sup T$ が存在し $S \subset T$ ならば，$\sup S \leq \sup T$ である．

(2) $\sup S$ と $\sup T$ が存在するとき，$\sup\{\sup S, \sup T\}$ と $\sup(S \cup T)$ の一方が存在するなら他方も存在し $\sup\{\sup S, \sup T\} = \sup(S \cup T)$ である．

証明． (1) 任意に $s \in S$ を固定する．$S \subset T$ より $s \in T$ であり，$\sup T$ は T の上限だから上界なので，$s \leq \sup T$ である．s は S の任意の要素だったから，$\sup T$ は S の上界である．$\sup S$ は S の上界全体の集合の最小元なので，$\sup S \leq \sup T$ である．
(2) まず，$\sup S$, $\sup T$, $\sup\{\sup S, \sup T\}$ が存在すると仮定する．任意に $x \in S \cup T$ を固定する．$x \in S$ のときは，上限が上界でもあることから $x \leq \sup S$ であり，同じことから $\sup S \leq \sup\{\sup S, \sup T\}$ なので，推移律から $x \leq \sup\{\sup S, \sup T\}$ である．$x \in T$ のときも同様に $x \leq \sup\{\sup S, \sup T\}$ である．x は $S \cup T$ の任意の要素だったから，$\sup\{\sup S, \sup T\}$ は $S \cup T$ の上界である．次に，u を $S \cup T$ の任意の上界とする．任意の $x \in S$ について，$x \in S \cup T$ だから，$x \leq u$ である．x は S の任意の要素だったから，u は S の上界である．そして，$\sup S$ は S の上界全体の最小元だから，$\sup S \leq u$ である．同様の議論により $\sup T \leq u$ も言えるので，u は $\{\sup S, \sup T\}$ の上界である．$\sup\{\sup S, \sup T\}$ は $\{\sup S, \sup T\}$ の上界全体の最小元だから，

$\sup\{\sup S, \sup T\} \leq u$である．以上から，$\sup\{\sup S, \sup T\}$は$S \cup T$の上界全体の最小元$\sup(S \cup T)$に一致する．

次に，$\sup S$, $\sup T$, $\sup(S \cup T)$が存在すると仮定する．$S \subset S \cup T$なので，(1)より$\sup S \leq \sup(S \cup T)$である．同様に$\sup T \leq \sup(S \cup T)$であるから，$\sup(S \cup T)$は$\{\sup S, \sup T\}$の上界である．$\{\sup S, \sup T\}$の上界$u$を任意に固定すると，$\sup S \leq u$かつ$\sup T \leq u$である．さらに，任意に$x \in S \cup T$を固定すると，$x \in S$または$x \in T$である．$x \in S$のとき，$\sup S$は$S$の上界でもあるから，$x \leq \sup S$なので，上の$\sup S \leq u$と推移律より$x \leq u$である．$x \in T$のときも同様に$x \leq u$となる．$x$は$S \cup T$の任意の要素だったから，$u$は$S \cup T$の上界である．そして$\sup(S \cup T)$は$S \cup T$の上界全体の最小元なので，$\sup(S \cup T) \leq u$である．以上から，$\sup(S \cup T)$は$\{\sup S, \sup T\}$の上界全体の最小元，すなわち$\sup\{\sup S, \sup T\}$に一致する．∎

定義 4.8　$(X, \leq)$を半順序集合とし，$S \subset X$とする．

$$s \in X \text{ が } S \text{ の\textbf{極大} (maximal) 元} \overset{\text{def}}{\iff} s \in S \text{ かつ } \nexists x \in S\,(s < x).$$
$$s \in X \text{ が } S \text{ の\textbf{極小} (minimal) 元} \overset{\text{def}}{\iff} s \in S \text{ かつ } \nexists x \in S\,(x < s).$$

例 4.16　$(\mathbb{N}, \leqq)$において，$\mathbb{N}$には極大元はなく，極小元は1である．$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$の極大元は6であり，極小元は1である．

例 4.17　$(\mathcal{P}(X), \subset)$において，$\mathcal{P}(X)$の極大元は$X$，極小元は$\emptyset$である．$X \neq \emptyset$のとき，$\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$の極小元の全体は1要素集合の全体に一致する．

例 4.18 $(\mathbb{N}, |\,)$において，$\mathbb{N}$には極大元はなく，極小元は1である．$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$の極大元は4, 5, 6，極小元は1である（p. 5 右図）．なお，$\mathbb{N} \setminus \{1\} = \{2, 3, 4, \ldots\}$の極小元の全体は素数の全体に一致する．

極大元や極小元は，どちらも一般に複数（場合によっては無限に）存在し得る．極大元や極小元が存在しない場合もある．

命題 4.5　半順序集合の空でない有限部分集合は極大元と極小元を持つ．

証明．　極大元の存在を示す．部分集合Sの要素数$|S|$に関する帰納法に

よる．$|S|=1$ のとき $S=\{s\}$ と書けて，明らかに s は S の極大元である．次に $|S|=n$ まで成立と仮定し，$|S|=n+1$ のときを示す．S の要素 s_1 を任意に選び，$S_0 \stackrel{\text{def}}{=} S \setminus \{s_1\}$ とおく．$|S_0|=n$ なので，帰納法の仮定より S_0 に極大元 s_0 が存在する．もし $s_0 \not< s_1$ なら，このことと s_0 が S_0 の極大元であることから，$s_0 < s$ なる $s \in S$ は存在しないので，s_0 は S の極大元である．一方，$s_0 < s_1$ なら s_1 が S の極大元になることを背理法で示す．s_1 が S の極大元でないという背理法の仮定から $s_1 < s$ なる $s \in S$ が存在し，仮定 $s_0 < s_1$ と命題4.1 (iii) で示した推移性より $s_0 < s$ である．一方 $s_1 < s$ より $s \neq s_1$ なので $s \in S \setminus \{s_1\} = S_0$ となり，$s_0 < s$ は s_0 が S_0 の極大元であることに反する．極小元の存在についても同様に示せる．∎

命題 4.6 $(X, \leq)$ を半順序集合，$S \subset X$ とする．

(i) s^* が S の最大元 $\Longrightarrow$ s^* は S の唯一の極大元.

(ii) s_* が S の最小元 $\Longrightarrow$ s_* は S の唯一の極小元.

(iii) S が有限集合ならば，(i) と (ii) の逆が成立する．

証明． (i) と (ii) は別資料で示す．

(iii) (i) の逆の証明のみ示す（(ii) も同様）．s^* を X の有限部分集合 S の唯一の極大元とする．任意に $t \in S$ を固定する．$T=\{s \in S \mid t \leq s\}$ とおくと，$t \in T$ だから T は空でなく，S の部分集合だから有限集合である．したがって，命題4.5より T は極大元 t^* をもつ．下の補題4.1より t^* は S の極大元なので，唯一という仮定より $t^*=s^*$ である．$t^* \in T$ と T の定義から $t \leq t^*$ だから，結局 $t \leq s^*$ となる．t は S の任意の要素だったから，s^* は S の最大元である．∎

補題 4.1 X の任意の部分集合 S と任意の $t \in S$ に対して，集合 $\{s \in S \mid t \leq s\}$ に極大元が存在すれば，それは S の極大元でもある．

証明． $T=\{s \in S \mid t \leq s\}$ とおき，t^* を T の極大元とする．t^* が S の極大元ではないとすると，$t^* < s$ なる $s \in S$ が存在する．t^* は T の極大元だから $t^* \in T$ であり，このことと集合 T の定義から $t \leq t^*$ なので，上の $t^* < s$ より $t \leq s$ となる．すると，集合 T の定義から $s \in T$ である．このことと $t^* < s$ であることは，t^* が T の極大元であることに反する．したがって，t^* は S の極大元でなければならない．∎