離散構造 資料 *Jul. 20, 2023*

半順序集合 —双対原理と順序同形—

1 双対原理

定義 1 関係 $\leq$ と その逆関係 $\geq$ は，$\{\leq, \geq\}$ に関して互いに**双対** (dual) であるという．概念 C と D が $\{\leq, \geq\}$ に関して互いに**双対**であるとは，概念 C の定義に現れるすべての概念を その $\{\leq, \geq\}$ に関する双対概念と入れ換えると，概念 D の定義と同値になることを言う．
（考えている関係 $\leq$ と $\geq$ が明確なときには,「$\{\leq, \geq\}$ に関して」という語句は一般に省略される．この資料でも以下そうする.）

命題（または条件）P と Q が互いに**双対**であるとは，P に現れるすべての概念を その双対概念と入れ換えると Q になることをいう．

自分自身と双対であるとき，自己双対 (self-dual) という．

例 1 関係 $<$ と $>$，最大元と最小元，上界と下界，上限と下限，極大元と極小元は，それぞれ互いに双対である．反射律，反対称律，推移律，比較可能律は，それぞれ自己双対である．事前資料 命題4.3の (i) と (ii)，命題4.6 の (i) と (ii) は，それぞれ互いに双対である．

問 1 事前資料 命題4.4 の (1) の双対と (2) の双対を書け．

双対原理 (duality principle) P を半順序集合に関する条件，Q をその双対とする.「任意の半順序集合について*，P である」が証明できるなら,「任意の半順序集合について*，Q である」もまた証明できる．

証明. 前者が証明可能とする．半順序関係の公理 (反射律，反対称律，推移律) はそれぞれ自己双対なので，前者の証明の書き出しの文「任意に半順序集合 $(X, \leq)$ を固定する*.」以降のすべての概念をそれぞれの双対に入れ換えれば，後者の証明が得られる． ∎

*これらの語句は省略されることが多いので，注意が必要である．

例 2 事前資料 命題 4.6 の (i) と (ii) は，命題も証明も互いに双対である．

(i) s^* が S の最大元 $\Longrightarrow$ s^* は S の唯一の極大元.

証明． s^* が S の最大元であるとする．最大元の定義より $s^* \in S$ なので，s^* が S の極大元であることを示すには $\nexists x \in S\,(s^* < x)$ を示せばよい．背理法による．$s^* < x$ なる $x \in S$ が存在すると仮定する．関係 $<$ の定義から $s^* \neq x$ かつ $s^* \leq x$ である．一方，$x \in S$ であって s^* は S の最大元だから $x \leq s^*$ である．これと上の $s^* \leq x$ に反対称律を適用すると $s^* = x$ となるが，この結果は上の $s^* \neq x$ に反する．以上から $\nexists x \in S\,(s^* < x)$ なので，s^* は S の極大元である．

次に一意性を示す．s を S の極大元とする．s^* が S の最大元であることと $s \in S$ より，$s \leq s^*$ である．もし $s \neq s^*$ とすると，$<$ の定義より $s < s^*$ となる．s^* は S の最大元なので $s^* \in S$ だから，上の $s < s^*$ という結果は s が S の極大元であることに反する．よって，$s = s^*$ でなければならない． ∎

(ii) s_* が S の最小元 $\Longrightarrow$ s_* は S の唯一の極小元.

証明． s_* が S の最小元であるとする．最小元の定義より $s_* \in S$ なので，s_* が S の極小元であることを示すには $\nexists x \in S\,(x < s_*)$ を示せばよい．背理法による．$x < s_*$ なる $x \in S$ が存在すると仮定する．関係 $<$ の定義から $x \neq s_*$ かつ $x \leq s_*$ である．一方，$x \in S$ であって s_* は S の最小元だから $s_* \leq x$ である．これと上の $x \leq s_*$ に反対称律を適用すると $x = s_*$ となるが，この結果は上の $x \neq s_*$ に反する．以上から $\nexists x \in S\,(x < s_*)$ なので，s_* は S の極小元である．

次に一意性を示す．s を S の極小元とする．s_* が S の最小元であることと $s \in S$ より，$s_* \leq s$ である．もし $s \neq s_*$ とすると，$<$ の定義より $s_* < s$ となる．s_* は S の最小元なので $s_* \in S$ だから，上の $s_* < s$ という結果は s が S の極小元であることに反する．よって，$s = s_*$ でなければならない． ∎

双対原理により，互いに双対な 2 つの命題は一方だけを証明すれば十分である．実際，数学の文献においても一方だけが証明されて，他方の証明は「双対原理による」だけで済ませられている．

2　順序同形

定義 2　半順序集合 $(X, \leq_X)$ と $(Y, \leq_Y)$ に対して，写像 $f : X \to Y$ は，

$$x \leq_X x' \implies f(x) \leq_Y f(x')$$

を満たすとき，[**順序** (order)] **準同形写像** (homomorphism) という．

順序準同形写像 $f : X \to Y$ が全単射で，逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ も順序準同形写像のとき，f は [**順序**] **同形写像** (isomorphism) という．

半順序集合 $(X, \leq_X)$ と $(Y, \leq_Y)$ の間に順序同形写像が存在するとき，$(X, \leq_X)$ と $(Y, \leq_Y)$ は [**順序**] **同形** (isomorphic) であるという．

例 3 X を有限集合とするとき，下式で定まる $f : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ は，$(\mathcal{P}(X), \subset)$ から $(\mathbb{N} \cup \{0\}, \leqq)$ への順序準同形写像である（$\leqq$ は普通の数の順序）．

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} |A| \quad (\,A \text{ の要素数}).$$

例 4　$(\mathbb{N}, |\,)$ と $(\mathbb{N}, \leqq)$ を考える（$|$ は整除関係，$\leqq$ は普通の数の順序）．$\mathbb{N}$ 上の恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ は，$(\mathbb{N}, |\,)$ から $(\mathbb{N}, \leqq)$ への順序準同形写像である．$\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ は全単射だが，$\mathrm{id}_{\mathbb{N}}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ は $(\mathbb{N}, \leqq)$ から $(\mathbb{N}, |\,)$ への順序準同形写像ではないので，$\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ は $(\mathbb{N}, |\,)$ から $(\mathbb{N}, \leqq)$ への順序同形写像ではない．

例 5　$(X, \leq_X)$ と $(Y, \leq_Y)$ を半順序集合とする．

(1) 恒等写像 $\mathrm{id}_X : (X, \leq_X) \to (X, \leq_X)$ は順序同形写像である．

(2) $(X, \leq_X)$ から $(Y, \leq_Y)$ への定値写像は順序準同形写像である．

定義 3 $(X, \leq)$ を半順序集合，$S \subset X$ とするとき，$(S, \leq \cap (S \times S))$ を $(X, \leq)$ の**部分順序集合** (sub-poset, ordered subset) という．

$\leq \cap (S \times S)$ は，$X \times X$ の部分集合としての関係 $\leq$ と集合 $S \times S$ の共通集合である．$\leq \cap (S \times S) \subset S \times S$ なので，$\leq \cap (S \times S)$ は S 上の 2 項関係である．$\leq \cap (S \times S)$ を $\leq$ の S 上への制限 (restriction) と呼ぶことがある．

$\leq \cap (S \times S)$ は S 上の半順序なので，$(S, \leq \cap (S \times S))$ はそれ自身半順序集合である．また，任意の $x, y \in S$ に対して

$$x \,(\leq \cap (S \times S))\, y \iff x \leq y$$

が成立する．このため，ふつう半順序関係 $\leq \cap (S \times S)$ を もとの半順序と同じ記号 $\leq$ で表す．よって例えば $(S, \leq \cap (S \times S))$ は $(S, \leq)$ と書く．

例 6　$|$ を整除関係とし，$n \in \mathbb{N}$ について $D_n \stackrel{\text{def}}{=} \{m \in \mathbb{N} \mid m \mid n\}$（$n$ の正の約数全体）とする．例えば $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ である．このとき，$(D_n, |)$ は $(\mathbb{N}, |)$ の部分順序集合である．

例 7　$\mathcal{S}_n$ を n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間全体からなる族とする．このとき，$(\mathcal{S}_n, \subset)$ は $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \subset)$ の部分順序集合である．

例 8 $(X, \leq)$ を半順序集合，$S \subset X$ とし，包含写像 $\mathrm{inc} : S \to X$ を考える（注： $\mathrm{inc}(s) = s \ \forall s \in S$）．このとき inc は，$(X, \leq)$ の部分順序集合 $(S, \leq)$ から $(X, \leq)$ への順序準同形写像である．

例 9　(1) 半順序集合 $(D_{30}, |)$ と $(\mathcal{P}(\{2, 3, 5\}), \subset)$ は順序同形である．

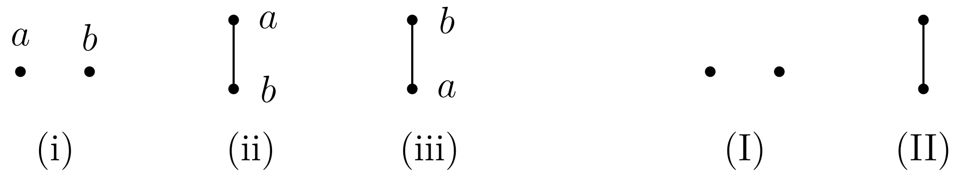
(2) $(D_{100}, |)$ と下のように構成される半順序集合 $(X, \ll)$ は順序同形である．

$$X = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\},$$

$$(x, y) \ll (x', y') \stackrel{\text{def}}{\iff} x \leqq x' \text{ かつ } y \leqq y'. \qquad (\leqq \text{ は普通の順序}).$$

X と Y が有限集合のとき，半順序集合 $(X, \leq_X)$ と $(Y, \leq_Y)$ が順序同形であることとは，$(X, \leq_X)$ と $(Y, \leq_Y)$ の Hasse 図が完全に同じ形である（ただし上下は入れ替わってはいけない）ことである．

問 2 集合 $\{a, b\}$ 上の半順序関係は，左下の (i), (ii), (iii) の Hasse 図で表される 3 通りあるが，これらのうち (ii) と (iii) は互いに順序同形である （$f(a) = b$, $f(b) = a$ なる $f : \{a, b\} \to \{a, b\}$ が順序同形写像）．したがって，2 要素集合上の同形でない半順序関係は，全部で右下の (I), (II) の 2 通りである．



(i)　(ii)　(iii)　(I)　(II)

3 要素集合上の互いに順序同形でないすべての半順序について，その Hasse 図を上の (I), (II) のように描け（全部で 5 通りある）．

例 10　4 要素集合上の互いに順序同形でない半順序関係は全部で 16 通りある．

定義 4　半順序集合 $(X, \leq_X)$ と $(Y, \leq_Y)$ に対して，写像 $f : X \to Y$ は，

$$x \leq_X x' \implies f(x) \geq_Y f(x')$$

を満たすとき，**双対 [順序] 準同形写像**という．

双対順序準同形写像 $f : X \to Y$ が全単射で，逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ も双対順序準同形写像のとき，f は**双対 [順序] 同形写像**という．

半順序集合 $(X, \leq_X)$ と $(Y, \leq_Y)$ の間に双対順序同形写像が存在するとき，$(X, \leq_X)$ と $(Y, \leq_Y)$ は**双対 [順序] 同形**であるという．

例 11　問 2 の 2 要素集合 $\{a, b\}$ 上の半順序関係について，恒等写像 $\mathrm{id}_{\{a,b\}}$ は，(ii) と (iii) の間の双対順序同形写像になっている．

X と Y が有限集合のとき，半順序集合 $(X, \leq_X)$ と $(Y, \leq_Y)$ が双対順序同形であることは，$(X, \leq_X)$ と $(Y, \leq_Y)$ の Hasse 図が上下を入れ替えると完全に同じ形になることである．

例 12 任意の半順序集合 $(X, \leq)$ は，$(X, \geq)$ と双対順序同形である．

例 13　I を集合 G から M への関係，すなわち $I \subset G \times M$ とする．$A \subset G$ に対して

$$A' \stackrel{\text{def}}{=} \{m \in M \mid \forall g \in A;\ g\ I\ m\}$$

とおくと，$' : A \mapsto A'$ は $(\mathcal{P}(G), \subset)$ から $(\mathcal{P}(M), \subset)$ への双対順序準同形写像となる．同様に，$B \subset M$ に対して

$$B' \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid \forall m \in B;\ g\ I\ m\}$$

とおくと，$' : B \mapsto B'$ は $(\mathcal{P}(M), \subset)$ から $(\mathcal{P}(G), \subset)$ への双対順序準同形写像となる．

証明. 前半だけ証明する（後半も同様）．$A_1 \subset A_2 \subset G$ と仮定する．$A_1' \supset A_2'$ を示せばよい．$m \in A_2'$ とする．すると $'$ の定義より，任意の $g \in A_2$ に対して $g\ I\ m$ である．よって，任意の $g \in A_1$ に対して，仮定 $A_1 \subset A_2$ より $g \in A_2$ だから，$g\ I\ m$ である．したがって $'$ の定義より $m \in A_1'$ となる．以上から，包含関係の定義より $A_1' \supset A_2'$ である．∎

以下の3例に示すように，双対自己同形な半順序集合も数多い．なお，下の 3 例においては，どの双対順序同形写像も自分自身との合成が恒等写像になっている（このような写像／操作は対合的 (involutive) であるという）．

例 14 X を集合とするとき，下式で定まる $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ は，$(\mathcal{P}(X), \subset)$ から $(\mathcal{P}(X), \subset)$ への双対順序同形写像である．

$$f(A) \overset{\text{def}}{=} A^c = X \setminus A.$$

例 15 例6の半順序集合 $(D_n, |\,)$ を考える．このとき，下式で定まる $g : D_n \to D_n$ は，$(D_n, |\,)$ から $(D_n, |\,)$ への双対順序同形写像である．

$$g(m) \overset{\text{def}}{=} n/m.$$

例 16 例7の半順序集合 $(\mathcal{S}_n, \subset)$ を考える．このとき，下式で定まる $h : \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n$ は，$(\mathcal{S}_n, \subset)$ から $(\mathcal{S}_n, \subset)$ への双対順序同形写像である．

$$h(H) \overset{\text{def}}{=} H^{\perp}.$$

ただし，$H^{\perp}$ は線形部分空間 $H \in \mathcal{S}_n$ の直交補空間である．すなわち，

$$H^{\perp} \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in H;\ x \perp y\}.$$

付録：例 13 の続き

次の命題は次回の資料で用いる．

命題 A 例 13 の設定の下で下式が成立する．$A_1,\ A_2 \subset G$ とし，$B_1, B_2 \subset M$ とするとき，

$$(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cap A_2', \qquad (B_1 \cup B_2)' = B_1' \cap B_2'.$$

証明． 第 1 式だけを示す（第 2 式も同様）．$A_1, A_2 \in \mathcal{P}(G)$ とすると，

$$\begin{aligned}
m \in (A_1 \cup A_2)' &\iff \forall g \in A_1 \cup A_2;\ g\ I\ m \\
&\iff \forall g \in A_1;\ g\ I\ m \text{かつ} \forall g \in A_2;\ g\ I\ m \\
&\iff m \in A_1' \text{かつ}\ m \in A_2' \\
&\iff m \in A_1' \cap A_2'
\end{aligned}$$

より，$(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cap A_2'$ である．∎