束

1　束の定義と例

定義 1　$(L, \leq)$ を半順序集合とする．任意の x, $y \in L$ に対して，部分集合 $\{x, y\}$ が上限と下限の両方を持つとき，$(L, \leq)$ を**束** (lattice) という．L が有限集合である束 $(L, \leq)$ を**有限** (finite) **束**という．$(L, \leq)$ が束のとき，$\sup\{x, y\}$ を $x \vee y$ と書き，x と y の**結び** (join) と呼び，$\inf\{x, y\}$ を $x \wedge y$ と書き，x と y の**交わり** (meet) と呼ぶ．

例 1　$(\mathcal{P}(X), \subset)$ は束であり，X が有限集合のとき有限束になる．

例 2　$|$ を整除関係とするとき，$(\mathbb{N}, |)$ は束であり，$(D_n, |)$ は有限束である（D_n は正整数 n の正の約数の全体）．これらにおいて $x \vee y = \mathrm{lcm}\{x, y\}$, $x \wedge y = \gcd\{x, y\}$ である．一方，$(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |)$ は束ではない．

例 3　$\mathcal{S}_n$ を n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間全体からなる族とするとき，$(\mathcal{S}_n, \subset)$ は束である．このとき，H_1, $H_2 \in \mathcal{S}_n$ に対して，

$$H_1 \wedge H_2 = H_1 \cap H_2,$$
$$H_1 \vee H_2 = H_1 + H_2 \overset{\text{def}}{=} \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in H_1,\ x_2 \in H_2\}.$$

例 4　$(\mathbb{N}, \leqq)$, $(\mathbb{Z}, \leqq)$, $(\mathbb{Q}, \leqq)$, $(\mathbb{R}, \leqq)$ はどれも束である．

命題 1　全順序集合は束である．

命題 1 の証明には，次の補題 1（事前資料 系 4.1 の一部）を用いる．

補題 1　半順序集合 $(X, \leq)$ において，

$$x \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad \sup\{x, y\} = y \quad \Longleftrightarrow \quad \inf\{x, y\} = x.$$

命題 1 の証明.　全順序集合 X の要素 x, y を任意に固定する．比較可能性から $x \leq y$ または $y \leq x$ である．どちらの場合も補題 1 より $\sup\{x, y\}$ と $\inf\{x, y\}$ が存在する．よって X は束である．∎

例 5 互いに順序同形でない要素数 4 の束は全部で 2 通りある．

次の命題は定義から明らかである．

命題 2 $(L, \leq)$ が束ならば，$(L, \geq)$ も束である．

例 6 互いに順序同形でない要素数 5 の束は全部で 5 通りある．

命題 3 束 L の任意の要素 $x,\ y,\ z$ について以下が成立する．

L1: 交換律 $x \vee y = y \vee x, \qquad x \wedge y = y \wedge x.$

L2: 結合律 $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), \qquad (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z).$

L3: 吸収律 $x \vee (x \wedge y) = x, \qquad x \wedge (x \vee y) = x.$

L2 の証明には，次の補題 2（事前資料 命題 4.4 (2)）を用いる．

補題 2 $(X, \leq)$ を半順序集合，$S,\ T \subset X$ とする．$\sup S$ と $\sup T$ が存在するとき，$\sup\{\sup S,\ \sup T\}$ と $\sup(S \cup T)$ の一方が存在するなら他方も存在して $\sup\{\sup S,\ \sup T\} = \sup(S \cup T)$ である．

命題 3 の証明． 双対原理より，いずれも左側の式を示すだけでよい．

L1. $x \vee y = \sup\{x, y\} = \sup\{y, x\} = y \vee x.$

L2. 束では任意の 2 要素集合が上限を持つことと補題 2 より，

$$\begin{aligned}(x \vee y) \vee z \ = \ \sup\{\, \sup\{x, y\}, \sup\{z\}\,\} \ &= \ \sup(\{x, y\} \cup \{z\}) \\ &= \ \sup\{x, y, z\}.\end{aligned}$$

同様に $x \vee (y \vee z) = \sup\{x, y, z\}$ だから，$(x \vee y) \vee z \ = \ x \vee (y \vee z)$.

L3. $x \wedge y$ は $\{x, y\}$ の下限だから下界でもあるので，$x \wedge y \leq x$ である．よって，補題 1 から $x \vee (x \wedge y) = \sup\{x,\ x \wedge y\} = x$ である．∎

命題 4 束の要素 $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\ (n \geq 1)$ について，下式が成り立つ：

$$\sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n,$$
$$\inf\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n.$$

証明. 双対原理より，第1式を示すだけでよい．n に関する帰納法による．$n=1$ のとき，$\sup\{x_1\}=x_1$ なので成立している．次に，

$$\sup\{x_1,x_2,\ldots,x_n\} \ = \ x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_n$$

を仮定すると，束であることから

$$\begin{aligned}\sup\{\,\sup\{x_1,x_2,\ldots,x_n\},\sup\{x_{n+1}\}\,\} &= (x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_n)\vee x_{n+1}\\ &= x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_n\vee x_{n+1}\end{aligned}$$

が存在するので，補題2より

$$\sup(\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\cup\{x_{n+1}\})=\sup\{x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1}\}$$

も存在し，両者は等しい．よって，第1式が成り立つ．∎

例 7 （資料「半順序集合」例13の続き）

$$\mathfrak{B}_G \ \stackrel{\text{def}}{=}\ \{A''\mid A\subset G\},\qquad \mathfrak{B}_M \ \stackrel{\text{def}}{=}\ \{B''\mid B\subset M\}$$

とおくと，$(\mathfrak{B}_G,\subset)$と$(\mathfrak{B}_M,\subset)$は束になり，$A_1,A_2\in\mathfrak{B}_G$ と $B_1,B_2\in\mathfrak{B}_M$ に対して下式が成り立つ：

$$\begin{aligned}A_1\wedge A_2 &= A_1\cap A_2, & A_1\vee A_2 &= (A_1\cup A_2)'',\\ B_1\wedge B_2 &= B_1\cap B_2, & B_1\vee B_2 &= (B_1\cup B_2)''.\end{aligned}$$

例7の証明には，次の補題3を用いる．

補題 3 資料「半順序集合」例 13 の設定の下で下式が成立する．A, A_1, $A_2\subset G$ とし，B, B_1, $B_2\subset M$ とする．

(i) $A_1\subset A_2 \ \Rightarrow\ A_1'\supset A_2'$, $\qquad B_1\subset B_2\ \Rightarrow\ B_1'\supset B_2'$.

(ii) $A\subset A''$, $\qquad B\subset B''$.

(iii) $A'''=A'$, $\qquad B'''=B'$.

(iv) $A\in\mathfrak{B}_G \ \Leftrightarrow\ A''=A$, $\qquad B\in\mathfrak{B}_M\ \Leftrightarrow\ B''=B$.

証明． いずれも左側の式のみを示す（右側の式の証明も同様）．
(i) 資料「半順序集合」例 13 で証明済み．
(ii) 任意に $g \in A$ を固定する．任意の $m \in A'$ について，A' の定義と $g \in A$ から $g\ I\ m$ である．よって，A'' の定義，すなわち $A'' = \{h \in G \mid \forall m \in A'; h\ I\ m\}$ より，$g \in A''$ となる．したがって，包含関係の定義から $A \subset A''$ である．
(iii) (ii) より $A' \subset (A')'' = A'''$．一方，(ii) より $A \subset A''$ なので，これに (i) を適用すれば $A' \supset A'''$．以上から $A' = A'''$．
(iv) ($\Rightarrow$) $A \in \mathfrak{B}_G$ とすると，$\mathfrak{B}_G$ の定義から，ある $A_0 \subset G$ が存在して $A = A_0''$ となるので，(iii) より $A'' = (A_0'')'' = (A_0''')' = A_0'' = A$.
($\Leftarrow$) $A'' = A$ とすると，$\mathfrak{B}_G$ の定義から $A = A'' \in \mathfrak{B}_G$．∎

例 7 の証明． $\mathfrak{B}_G$ についてのみ証明する（$\mathfrak{B}_M$ も同様）．$A_1, A_2 \in \mathfrak{B}_G$ とする．補題 3 (ii) より $A_1 \cap A_2 \subset (A_1 \cap A_2)''$ である．一方，$A_1 \cap A_2 \subset A_1$ なので，補題 3 (i) を 2 回と補題 3 (iv) を使うと $(A_1 \cap A_2)'' \subset A_1'' = A_1$. 同様に $(A_1 \cap A_2)'' \subset A_2$ も言えるので，$(A_1 \cap A_2)'' \subset A_1 \cap A_2$ となる．以上から $(A_1 \cap A_2)'' = A_1 \cap A_2$ なので，補題 3 (iv) より $A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{B}_G$ である．よって，$A_1 \cap A_2$ は $(\mathfrak{B}_G, \subset)$ における $\{A_1, A_2\}$ の最大下界となるから，$A_1 \wedge A_2 = A_1 \cap A_2$ である．次に，最小上界について示す．$\mathfrak{B}_G$ の定義から $(A_1 \cup A_2)'' \in \mathfrak{B}_G$ である．補題 3 (ii) より $A_1 \cup A_2 \subset (A_1 \cup A_2)''$ なので，$(A_1 \cup A_2)''$ は $(\mathfrak{B}_G, \subset)$ における $\{A_1, A_2\}$ の上界である．A を $(\mathfrak{B}_G, \subset)$ における $\{A_1, A_2\}$ の任意の上界とする．すなわち，$A \in \mathfrak{B}_G$ かつ $A_1 \subset A$ かつ $A_2 \subset A$ とする．すると，$A_1 \cup A_2 \subset A$ なので，補題 3 (i) を 2 回と補題 3 (iv) を使うと $(A_1 \cup A_2)'' \subset A'' = A$ となる．よって，$(A_1 \cup A_2)''$ は $(\mathfrak{B}_G, \subset)$ における $\{A_1, A_2\}$ の最小上界，すなわち $A_1 \vee A_2 = (A_1 \cup A_2)''$ である． ∎

2 束の代数的定義

以下では，L1, L2, L3 を満たす代数系 $(L, \vee, \wedge)$ について考える．

定義 2 P を，L1, L2, L3 を満たす任意の代数系 $(L, \vee, \wedge)$ に関する命題とするとき，命題 P に含まれるすべての $\vee$ と $\wedge$ を入れ換えてできる命題 P^d を P の**双対**と呼ぶ．

例 8 L1, L2, L3 は，いずれも互いに双対な条件の対からなっている．

$(\boldsymbol{L}, \vee, \wedge)$ に関する双対原理　L1, L2, L3 を満たす任意の代数系に関する命題 P について，P が証明可能ならば P^d も証明可能である．

証明. L1, L2, L3 は双対な条件の対からなっているので，P の証明の双対が P^d の証明である．∎

補題 4　L1, L2, L3 を満たす代数系 $(L, \vee, \wedge)$ に関して以下が成立する．

(i) (ベキ等律)　$x \vee x = x, \quad x \wedge x = x.$

(ii) $x \vee y = y \;\Leftrightarrow\; x \wedge y = x.$

証明. (i) 双対原理から第 1 式だけ示せば十分である．吸収律 L3 より $x = x \wedge (x \vee y)$ なので，これを $x \vee x$ の第 2 項に代入し，$x \vee y$ を吸収律 L3 における y と見なせば $x \vee x = x \vee (x \wedge (x \vee y)) = x$.
(ii) 交換律 L1 と双対原理から $(\Rightarrow)$ だけ示せば十分である．$x \wedge y$ に $y = x \vee y$ を代入し吸収律 L3 を使えば，$x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$. ∎

定理 1　L1, L2, L3 を満たす代数系 $(L, \vee, \wedge)$ において「$x \leq y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \vee y = y \; (\Leftrightarrow x \wedge y = x)$」とおくと $(L, \leq)$ は束であり，$\sup\{x, y\} = x \vee y$, $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ が成立する．

証明. まず，$\leq$ が半順序であることを示す．ベキ等律（補題 4 (i)）より $x \vee x = x$ なので，$x \leq x$（反射律）．次に，$x \leq y$ かつ $y \leq x$ とすると，$x \vee y = y$ かつ $y \vee x = x$ なので，交換律 L1 より $x = y$（反対称律）．最後に，$x \leq y$ かつ $y \leq z$ とすると，$x \vee y = y$ かつ $y \vee z = z$ だから，結合律 L2 より $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$ となるので，$x \leq z$（推移律）．

次に束になることを示す．結合律 L2 とベキ等律（補題 4 (i)）より $x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$ なので，$x \leq x \vee y$. 同様に $y \leq x \vee y$ である．よって $x \vee y$ は $\{x, y\}$ の上界である．z を $\{x, y\}$ の任意の上界とすると，$x \leq z$ より $x \vee z = z$ であり，$y \leq z$ より $y \vee z = z$ である．これらと結合律 L2 から $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee z = z$ なので，$x \vee y \leq z$ である．以上で，$x \vee y$ が $\{x, y\}$ の上界全体の最小元であること，すなわち $x \vee y$ が $\{x, y\}$ の上限であること（$x \vee y = \sup\{x, y\}$）が言えた．また，双対的に $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ も言える．よって，$(L, \leq)$ は $\sup\{x, y\} = x \vee y$ かつ $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ なる束である．∎

命題3と定理1より，束を次のように代数的に定義することもできる．

定義 3 $(L, \vee, \wedge)$ が束 $\overset{\text{def}}{\iff}$ L1, L2, L3 を満たす．

束は $(L, \leq)$ や $(L, \vee, \wedge)$ と表記する（単に束 L と書くこともある）．

命題 5 束において下式が成立する．

(i) $x \leq y \implies x \vee z \leq y \vee z$ かつ $x \wedge z \leq y \wedge z.$

(ii) $v \leq w,\, x \leq y \implies v \vee x \leq w \vee y$ かつ $v \wedge x \leq w \wedge y.$

証明． (i) 双対原理より $x \leq y \Rightarrow x \vee z \leq y \vee z$ だけを示せば十分である．$x \leq y$ を仮定すると，補題1より $x \vee y = y$ なので，$(x \vee z) \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee (z \vee z) = y \vee z$ であるから，補題1より $x \vee z \leq y \vee z.$
(ii) 双対原理より $v \leq w, x \leq y \Rightarrow v \vee x \leq w \vee y$ だけを示せば十分である．交換律に注意して (i) を2回使えば $v \vee x \leq w \vee x \leq w \vee y.$ ∎

3 部分束と束準同形写像

定義 4 $(L, \vee, \wedge)$ を束，$M \subset L$ とする．M が L の演算 $\vee$ と $\wedge$ について閉じているとき，$(M, \vee, \wedge)$ を L の**部分束** (sublattice) という．

$(L, \vee, \wedge)$ の部分束 $(M, \vee, \wedge)$ は，明らかにそれ自身束である．考えている演算 $\vee, \wedge$ が明確なとき，部分束 $(M, \vee, \wedge)$ を単に M と書く．

例 9 $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ の部分束を**集合束** (lattice of sets) という．

(i) $A \subset X$ のとき，$\mathcal{P}(A)$ は $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ の部分束である．

(ii) X の有限部分集合全体からなる族は $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ の部分束である．

例 10 $(L, \vee, \wedge)$ を束とし，$a \in L$ とする．

(i) L は $(L, \vee, \wedge)$ の部分束である．

(ii) $\{a\}$ は $(L, \vee, \wedge)$ の部分束である．

(iii) $\{x \in L \mid x \leq a\}$ と $\{x \in L \mid a \leq x\}$ は $(L, \vee, \wedge)$ の部分束である．

例 11 正整数 n に対し，$D_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \mid n\}$ は $(\mathbb{N}, \mathrm{lcm}, \gcd)$ の部分束である．

例 12　（資料「半順序集合」例 7，本資料 例 3 参照）．$\mathcal{S}_n$ を n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間全体からなる族とするとき，$(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \subset)$ と $(\mathcal{S}_n, \subset)$ は束であり，$(\mathcal{S}_n, \subset)$ は $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \subset)$ の部分順序集合だが，$(\mathcal{S}_n, \subset)$ は $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \subset)$ の部分束ではない．

定義 5　$(L_1, \vee, \wedge)$ と $(L_2, \vee, \wedge)$ を束とし，$f : L_1 \to L_2$ とする．

f が **[束] 準同形写像**

$$\overset{\text{def}}{\iff} \forall x, y \in L_1;\ f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \text{ かつ } f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

f が **[束] 同形写像**　$\overset{\text{def}}{\iff}$　f が準同形写像であって全単射．

$(L_1, \vee, \wedge)$ と $(L_2, \vee, \wedge)$ が **[束] 同形**

$$\overset{\text{def}}{\iff} (L_1, \vee, \wedge) \text{ と } (L_2, \vee, \wedge) \text{ の間に同形写像が存在する．}$$

例 13　(i) 束上の恒等写像は束同形写像である．

(ii) 束から束への定値写像は束準同形写像である．

例 14　（資料「半順序集合」例 9 参照）

(i) $(D_{30}, |)$ と $(\mathcal{P}(\{2,3,5\}), \subset)$ は束同形である．

(ii) $(D_{100}, |)$ と資料「半順序集合」例 9 (2) の $(X, \ll)$ は束同形である．

有限束 L_1 と L_2 が同形であることは，L_1 と L_2 の Hasse 図が完全に同じ形である（ただし上下は入れ替わってはいけない）ことである．

命題 6　(i) 束準同形写像ならば順序準同形写像である．

(ii) L を束，X を半順序集合，$f : L \to X$ とするとき，

$$X \text{ が束で } f \text{ が束同形写像} \iff f \text{ が順序同形写像．}$$

証明． (i) $f : L_1 \to L_2$ を束準同形写像とする．$x, y \in L_1$ について，$x \leq y$ とすると，$x \vee y = y$ なので，f が束準同形写像であることより $f(x) \vee f(y) = f(x \vee y) = f(y)$ となるから，$f(x) \leq f(y)$ である．よって，f は順序準同形写像である．

(ii) $(\Rightarrow)$ $f : L \to X$ を束同形写像とすると，代数系の同形写像の性質より f^{-1} も束同形写像である．束同形写像は束準同形写像だから，

(i) より順序準同形写像である．よって，f も f^{-1} も順序準同形写像なので，定義より f は順序同形写像である．
($\Leftarrow$) L を束，X を半順序集合，$f : L \to X$ を順序同形写像とする．まず，X が束であることを示す．$x, y \in X$ を任意に固定する．f は全単射なので L に $l = f^{-1}(x)$ と $m = f^{-1}(y)$ が存在し，L は束だから $l \vee m$ が存在する．$f(l \vee m)$ が $\{x, y\}$ の上限であることを示す．f が順序同形写像であることと $l \leq l \vee m$ から $x = f(l) \leq f(l \vee m)$ であり，同様に $y = f(m) \leq f(l \vee m)$ である．よって，$f(l \vee m)$ は $\{x, y\}$ の上界である．$z \in X$ を $\{x, y\}$ の任意の上界とする．f が順序同形写像であることと $x \leq z$ から $l = f^{-1}(x) \leq f^{-1}(z)$ であり，同様に $m \leq f^{-1}(z)$ である．よって，$l \vee m \leq f^{-1}(z)$ なので，$f(l \vee m) \leq f(f^{-1}(z)) = z$ となる．したがって，$f(l \vee m)$ は $\{x, y\}$ の最小上界，すなわち上限である．双対的に $\{x, y\}$ の下限も存在するので，X は束である．次に，f が束同形写像であることを示す．任意の $l, m \in L$ に対して，$x = f(l), y = f(m)$ とおくと，上での議論から $f(l \vee m)$ は $\{x, y\} = \{f(l), f(m)\}$ の上限なので，$f(l \vee m) = f(l) \vee f(m)$ である．双対的に $f(l \wedge m) = f(l) \wedge f(m)$ も言えるので，f は束準同形写像である．そして，f は全単射だったので，束同形写像である．∎

命題 6 (i) の逆は成立しない．例えば，$(\mathbb{N}, |\,)$ と $(\mathbb{N}, \leqq)$ は束であり，$\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : (\mathbb{N}, |\,) \to (\mathbb{N}, \leqq)$ は順序準同形写像だが，束準同形写像ではない．

命題 7 f が束 L_1 から束 L_2 への準同形写像のとき，$f(L_1) = \{f(x) \mid x \in L_1\}$ は L_2 の部分束である．
証明． $f : L_1 \to L_2$ を束準同形写像とする．$l, m \in f(L_1)$ とすると，$f(L_1)$ の定義より，$l = f(x),\ m = f(y)$ なる $x, y \in L_1$ が存在する．そして，f が束準同形写像であることから $l \vee m = f(x) \vee f(y) = f(x \vee y) \in f(L_1)$ となる．よって，$f(L_1)$ は $\vee$ に関して閉じている．$f(L_1)$ が $\wedge$ に関して閉じていることも双対的に言える．∎

定義 6 $(L_1, \vee, \wedge)$ と $(L_2, \vee, \wedge)$ を束とし，$f : L_1 \to L_2$ とする．

f が **[束] 双対準同形写像**
$\quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x, y \in L_1;\ f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y)$ かつ $f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y)$.

f が [**束**] **双対同形写像** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f が双対準同形写像であって全単射.

$(L_1, \vee, \wedge)$ と $(L_2, \vee, \wedge)$ が [**束**] **双対同形**
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(L_1, \vee, \wedge)$ と $(L_2, \vee, \wedge)$ の間に双対同形写像が存在する.

例 15 （資料「半順序集合」例 14 参照）. $A \mapsto X \setminus A = A^c$ は，束 $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ からそれ自身への双対同形写像である.

例 16 （資料「半順序集合」例15参照）. $m \mapsto n/m$ は，束 $(D_n, \mathrm{lcm}, \gcd)$ からそれ自身への双対同形写像である.

例 17 （資料「半順序集合」例16参照）. $H \mapsto H^\perp$ は，束 $(\mathcal{S}_n, +, \cap)$ からそれ自身への双対同形写像である.

有限束 L_1 と L_2 が双対同形であることは，L_1 と L_2 の Hasse 図が上下を入れ替えると完全に同じ形になることである.

束双対（準）同形写像と双対順序（準）同形写像の間にも，命題6と同様の関係がある.

例 18 （例7の続き） $'$ は $(\mathfrak{B}_G, \subset)$ と $(\mathfrak{B}_M, \subset)$ の間の束双対同形写像である.

証明. 任意の $A \in \mathfrak{B}_G$ に対して，補題3 (iii) より $A' = A''' = (A')''$ なので，補題3 (iv) から $A' \in \mathfrak{B}_M$ である．よって，$\mathfrak{B}_G$ 上の $'$ は $\mathfrak{B}_G$ から $\mathfrak{B}_M$ への写像になっている．同様に，$\mathfrak{B}_M$ 上の $'$ は $\mathfrak{B}_M$ から $\mathfrak{B}_G$ への写像である．そして，任意の $A \in \mathfrak{B}_G$ と $B \in \mathfrak{B}_M$ に対して，補題3 (iv) より $(A')' = A'' = A$, $(B')' = B'' = B$ であるから，写像 $' : \mathfrak{B}_G \to \mathfrak{B}_M$ と写像 $' : \mathfrak{B}_M \to \mathfrak{B}_G$ は互いの逆写像になっている．よって，これら2つの写像 $'$ は全単射である．次に，A_1, $A_2 \in \mathfrak{B}_G$ とすると，例7, 補題3 (iii), (iv)，資料「半順序集合」命題Aから

$$(A_1 \vee A_2)' = (A_1 \cup A_2)''' = (A_1 \cup A_2)' = A_1' \cap A_2' = A_1' \wedge A_2',$$
$$(A_1 \wedge A_2)' = (A_1 \cap A_2)' = (A_1'' \cap A_2'')' = (A_1' \cup A_2')'' = A_1' \vee A_2'$$

なので，$' : \mathfrak{B}_G \to \mathfrak{B}_M$ は束双対準同形写像となる．以上から，$'$ は束双対同形写像である. ∎