形式概念分析

定義 1 三つ組 (G, M, I) が **[形式] 文脈** ([formal] context) であるとは，G と M が集合であり，I が G と M の間の関係，すなわち $I \subset G \times M$ であることをいう．G の要素を**対象** (object)，M の要素を**属性** (attribute) と呼ぶ．$(g, m) \in I$ を $g\ I\ m$ と書き，「対象 g は属性 m を持つ」を意味するものとする．I は付随関係 (incidence relation) と呼ばれる．

G と M が有限集合のとき，文脈 (G, M, I) は，$|G|$ 行 $|M|$ 列の表で，$g\ I\ m$ のとき行 g 列 m のセルに×を記入することにより表現する．この表を文脈表 (context table) と呼ぶ．

例 1 $G = \{1, 2, 3, 4\}$, $M = \{a, b, c, d, e\}$, $I = \{(1, a), (1, c), (2, a), (2, c), (3, b), (3, c), (4, d)\}$ のとき，文脈 (G, M, I) は右の文脈表で表される．

	a	b	c	d	e
1	$\times$		$\times$		
2	$\times$		$\times$		
3		$\times$	$\times$		
4				$\times$	

定義 2 $A \subset G$ と $B \subset M$ に対して，

$$A' \overset{\text{def}}{=} \{m \in M \mid \text{任意の } g \in A \text{ に対して } g\ I\ m\},$$
$$B' \overset{\text{def}}{=} \{g \in G \mid \text{任意の } m \in B \text{ に対して } g\ I\ m\}$$

とおく．この二つの写像 $' : \mathcal{P}(G) \to \mathcal{P}(M)$, $' : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(G)$ は導出作用素 (derivation operator) または導出演算子と呼ばれる

例 2 $\emptyset \subset G$ に対して $\emptyset' = M$ であり，$\emptyset \subset M$ に対して $\emptyset' = G$ である．

命題 1 (G, M, I) を文脈，$A, A_1, A_2 \subset G$ とし，$B, B_1, B_2 \subset M$ とする．

(i) $A_1 \subset A_2 \ \Rightarrow\ A_2' \subset A_1'$, $\qquad B_1 \subset B_2 \ \Rightarrow\ B_2' \subset B_1'$,

(ii) $A \subset A''$, $\qquad B \subset B''$,

(iii) $A''' = A'$, $\qquad B''' = B'$,

(iv) $A \subset B' \ \Leftrightarrow\ B \subset A' \ \Leftrightarrow\ A \times B \subset I$.

証明 (i), (ii), (iii) 資料「束」補題3で証明済み．
(iv) 導出作用素$'$の定義から明らかに，$A \subset B' \Leftrightarrow A \times B \subset I$及び$B \subset A' \Leftrightarrow A \times B \subset I$である． ∎

定義 3 $A \subset G$, $B \subset M$のとき，対(A, B)が文脈(G, M, I)の[**形式**]**概念**([formal] concept)であるとは，$A' = B$かつ$B' = A$であることをいう．(A, B)が概念のとき，Aを**外延**(extent)，Bを**内包**(intent)と呼ぶ．文脈$\mathbb{K} = (G, M, I)$の概念全体の集合を$\mathfrak{B}(\mathbb{K})$または$\mathfrak{B}(G, M, I)$で表す．

命題 2 (G, M, I)を文脈とするとき，

(i) $\mathfrak{B}(G, M, I) = \{(A'', A') \mid A \subset G\} = \{(B', B'') \mid B \subset M\}$,

(ii) (A, B)が概念 $\Longleftrightarrow$ $A \times B \subset I$ かつ
「$A \subset C$, $B \subset D$, $C \times D \subset I \Rightarrow A = C$ かつ $B = D$」

証明 (i) 形式概念の定義と命題1 (iii) より明らか．
(ii) ($\Rightarrow$) (A, B)は概念であるから$A = B'$なので，命題1 (iv) より$A \times B \subset I$である．$A \subset C$, $B \subset D$, $C \times D \subset I$とし，$g \in C$とする．任意の$m \in B$について，仮定$C \times D \subset I$と命題1 (iv) より$m \in B \subset D \subset C'$なので，$g\ I\ m$となるから，$g \in B' = A$である．よって，$C \subset A$なので$A = C$となる．同様に$B = D$も言える．
($\Leftarrow$) 命題1 (iv) より$A \times B \subset I$から$B \subset A'$である．このことと$A \subset A$であること，及び命題1 (ii), (iv) より$A \times A' \subset I$であることから，仮定より$B = A'$である．同様に$A = B'$も言えるので，(A, B)は概念である． ∎

(G, M, I)が文脈のとき，命題1 (ii) より$G'' = G$, $M'' = M$なので，命題2 (i) から(G, G')と(M', M)が概念であることが解る．

例 3 例1の場合，$\mathfrak{B}(G, M, I)$は次ページ下の左図に現れる6個の概念からなる．

概念の定義と命題1 (i) より，(A_1, B_1)と(A_2, B_2)が概念のとき，$A_1 \subset A_2$と$B_1 \supset B_2$は同値である．

定義 4　概念 (A_1, B_1) と (A_2, B_2) に対して，$A_1 \subset A_2$ のとき（または同じことだが，$B_1 \supset B_2$ のとき）$(A_1, B_1) \le (A_2, B_2)$ と書く．関係 $\le$ を，概念の **[階層] 順序** ([hierarchical] order) と呼ぶ．$(A_1, B_1) \le (A_2, B_2)$ のとき，(A_1, B_1) を (A_2, B_2) の下位概念 (subconcept) と呼び，(A_2, B_2) を (A_1, B_1) の上位概念 (superconcept) と呼ぶ．

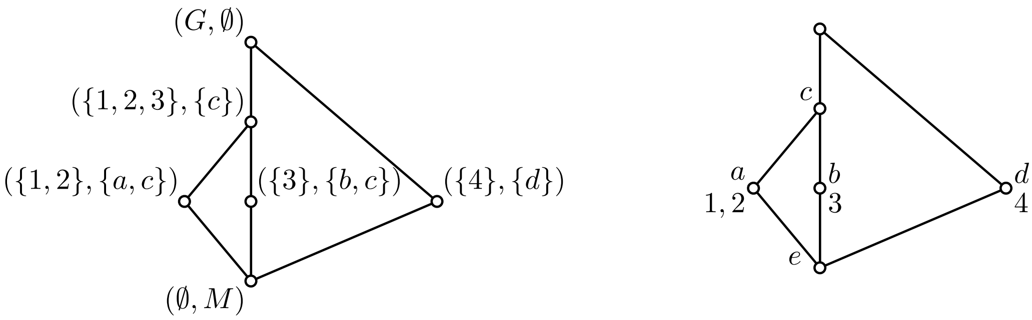
命題 3　階層順序 $\le$ は $\mathfrak{B}(G, M, I)$ 上の半順序関係であり，$\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) = (\mathfrak{B}(G, M, I), \le)$ は束になる．$\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ の結び $\vee$ と交わり $\wedge$ は下式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
(A_1, B_1) \vee (A_2, B_2) &= ((A_1 \cup A_2)'',\ B_1 \cap B_2), \\
(A_1, B_1) \wedge (A_2, B_2) &= (A_1 \cap A_2,\ (B_1 \cup B_2)'').
\end{aligned}
$$

証明　資料「束」例 7 と例 18 より明らか．　∎

$\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I) = (\mathfrak{B}(G, M, I), \le)$ を **概念束** (concept lattice) と呼ぶ．資料「束」例 7 と例 18 より，$\underline{\mathfrak{B}}(G, M, I)$ は，$(\mathfrak{B}_G, \subset)$ 及び $(\mathfrak{B}_M, \supset)$ と同形である（$\mathfrak{B}_G$ と $\mathfrak{B}_M$ の定義は資料「束」例 7 を参照）．

例 4　例 1 の文脈から作られる概念束の Hasse 図は下の左図のようになる．



定義 5　対象 $g \in G$ に対して $g' \overset{\text{def}}{=} \{g\}' = \{m \in M \mid g\ I\ m\}$ と書き，写像 $\gamma : G \to \mathfrak{B}(G, M, I)$ を $\gamma g = \gamma(g) \overset{\text{def}}{=} (g'', g')$ と定め，γg を g に対応する対象概念と呼ぶ．同様に，属性 $m \in M$ に対して $m' \overset{\text{def}}{=} \{m\}' = \{g \in G \mid g\ I\ m\}$ と書き，写像 $\mu : M \to \mathfrak{B}(G, M, I)$ を $\mu m = \mu(m) \overset{\text{def}}{=} (m', m'')$ と定め，μm を m に対応する属性概念と呼ぶ．

例 5 例1の文脈から作られる概念束に γ と μ の像を書き込んだものは3ページ下の右図のようになる（通常，図には写像 γ や μ の記号は書かない；例えば図中の a は μa のことである）．

命題 4 (i) 任意の $g \in G, m \in M$ に対し，

$$g \; I \; m \iff \gamma g \leq \mu m.$$

(ii) 概念 (A, B) に対して，

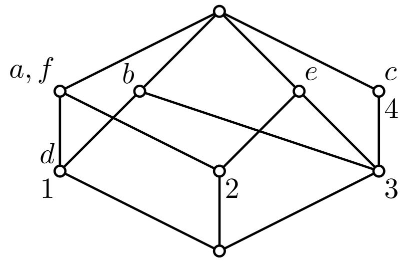
$$A = \{g \in G \mid \gamma g \leq (A, B)\},$$
$$B = \{m \in M \mid (A, B) \leq \mu m\}.$$

証明 (i) ($\Rightarrow$) $g \; I \; m$ とする．このとき，$m \in g'$ である．$g_0 \in g''$ とすると，任意の $m_0 \in g'$ に対して $g_0 \; I \; m_0$ なので，$m \in g'$ より $g_0 \; I \; m$ となるから，$g_0 \in m'$ である．よって，$g'' \subset m'$ となるので，$\gamma g = (g'', g') \leq (m', m'') = \mu m$ である．
($\Leftarrow$) $(g'', g') = \gamma g \leq \mu m = (m', m'')$ より，$g'' \subset m'$ である．命題1 (ii) から $g \in \{g\} \subset \{g\}'' = g''$ なので，これと $g'' \subset m'$ より $g \in m'$ となる．よって，$g \; I \; m$ である．
(ii) 第1式を示す．$g \in A$ とすると，$\{g\} \subset A$ だから，命題1 (i) と A が外延であることより $g'' \subset A'' = A$ となるので，$\gamma g = (g'', g') \leq (A, B)$ である．よって，$A \subset \{g \in G \mid \gamma g \leq (A, B)\}$ である．逆に，$(g'', g') = \gamma g \leq (A, B)$ とすると $g \in g'' \subset A$ なので，$A \supset \{g \in G \mid \gamma g \leq (A, B)\}$ である．以上から $A = \{g \in G \mid \gamma g \leq (A, B)\}$ となる．第2式も同様に導かれる． ∎

問 1　右の文脈について，3 ページ下の左図と右図に対応する図を それぞれ描け．

	a	b	c	d
1		×	×	×
2	×	×		×
3			×	×

問 2　1, 2, 3, 4 を対象とし，a, b, c, d, e, f を属性とする右の概念束について，下の問に答えよ．



(1) 3 ページ下の左図に対応する図を描け．

(2) 文脈表を書け．

参考文献：

鈴木治，室伏俊明著： 形式概念分析—入門・支援ソフト・応用—，知能と情報（日本知能情報ファジィ学会誌）， vol. 19, no. 2 (2007) pp. 103–142.

`https://www.jstage.jst.go.jp/article/jsoft/19/2/19_103/_article/-char/ja`

FCA 支援ソフト Concept Explorer

`http://prdownloads.sourceforge.net/conexp/`

`http://osdn.jp/projects/sfnet_conexp/`